数理解析研究所講究録
299巻 1977年 71-92

Some fixed point theorems and their applications

東工大 理 高橋 渉

§1. はじめに.

Xをある与えられた集合とし，TをXからXへの写像とするとき $Tx=x$ なる点xをTの不動点という。この不動点の存在は写像Tと空間Xの条件によってきまってくるが，この不動点の存在をうまく使うことによってとても有用な命題がえられたり，これまで複雑に証明されていた命題が簡単に証明されたりすることがある。ここではまずはじめによく知られたBrouwerの不動点定理と単位の分割定理を用いることによって線形位相空間における存在定理を証明し，それを凸不等式のシステムに応用してみる。このシステムに関する命題を用いてBanach spacesにおける定理やinvariant measuresに関する定理を証明し，さらにはgamesに関する定理やmini-max定理などをも証明してみる。

§2. 存在定理.

まず次の定理をのべる。

定理1. Xを線形位相空間Eのcompact convex集合とし, Aを$X \times X$の部分集合で次の条件をみたすものとする。

(1) 任意の$y \in X$に対して集合$\{x \in X ; (x, y) \in A\}$は閉である。

(2) すべての$x \in X$に対して$(x, x) \in A$である。

(3) 任意の$x \in X$に対して集合$\{y \in X ; (x, y) \notin A\}$はconvexである。

そのとき, $x_0 \times X \subset A$なる$x_0 \in X$が存在する。

証明. 任意の$x \in X$に対して, $(x, y) \notin A$なる$y \in X$の存在を仮定しよう。$A_y = \{x \in X ; (x, y) \in A\}$とすると$X = \bigcup_{y \in X} A_y^c$であり, Xのcompactnessを使うと$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i}^c$なるような$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$をうることができる。$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$をこのcoveringに対応する単位の分割とし, ~~mapping~~ pを

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\, y_i$$

で定義すると, すべての$x \in X$に対して$p(x) \in {}_xA^c$である。ここで${}_xA = \{y \in X ; (x, y) \in A\}$である。$X_0$を

$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ によってはられる finite dimensional simplex とすると p は X_0 から X_0 への continuous mapping であり，Brouwer の不動点定理を使うことによって $x_0 = p(x_0) \in x_0 A^c$ なる $x_0 \in X_0 \subset X$ をうることができる。これは $(x_0, x_0) \in A$ に反する。ゆえに定理が証明された。

この特別な場合として次の使いやすい定理をうる。

定理2. X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし F を次の条件をみたす $X \times X$ 上の実数値函数とする。

(1) 任意の $y \in X$ に対して x の函数 $F(x, y)$ は upper semicontinuous である。

(2) 任意の $x \in X$ に対して y の函数 $F(x, y)$ は convex 函数である。

(3) すべての $x \in X$ に対して $F(x, x) \geq c$ である。

そのとき すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. いま $A = \{(x, y) \in X \times X : F(x, y) \geq c\}$ とする。そのとき A は定理1の条件(1), (2), (3)をみたすことは明らかである。それゆえすべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c$ なる $x_0 \in X$ をうることができる。これで定理が証明されたことになる。

§3. 凸不等式のシステム.

Xを線形位相空間Eのcompact convex集合とし, $f_1, f_2, \cdots, f_n$をX上のlower semicontinuousでconvexな実数値函数とする。n個の不等式のシステム

$$(*) \qquad f_i(x) \leq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

がX上でconsistentであるとは$(*)$をみたすような$x \in X$が存在するときであり, システム$(*)$がX上でirreducibly inconsistentであるとはシステム$(*)$がinconsistentであり, かつ$(*)$のどんな$(n-1)$個のシステムもX上でconsistentであるときをいう。

定理3. システム$(*)$がX上でconsistentである必要十分条件は$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$なる$n$個の非負な数$\alpha_i$に対していつでも$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y_0) \leq 0$なる$y_0 \in X$が存在することである。

証明. 必要性は明らかである。十分性を証明する。もし, $f_i(x_0) \leq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$なる$x_0 \in X$が存在しないとすると$G_i = \{x \in X ; f_i(x) > 0\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$に対して$X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$である。いま開集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$に対応する単位の分割を$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$とし, $X \times X$上の函数Fを

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると F は定理2の(1), (2)をみたしており，さらに x の函数 $F(x, x)$ は lower semicontinuous であることより，すべての $x \in X$ に対して $F(x, x) \geq c_0 > 0$ なる実数 c_0 の存在も容易にわかる。そこで定理2が使えて すべての $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(x_0) f_i(y) > 0$$

なる $x_0 \in X$ の存在をうる。これで十分性が証明された。

定理3′. $\mathfrak{F}$ を X 上の real valued lower semicontinuous convex functions f の集合とする。そのとき次の(1), (2), (3)は同値である。

(1) すべての $f \in \mathfrak{F}$ に対して $f(x) \leq 0$ なる $x \in X$ が存在する。

(2) 任意の $\{f_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathfrak{F}$ と $\alpha_i \geq 0$ で $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ なる m 個の実数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(y) \leq 0$$

なる $y \in X$ が存在する。

(3) 任意の $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in \mathfrak{F}^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(y) \leq 0$$

なる $y \in X$ が存在する。

定理4. システム(*)が X 上で irreducibly inconsistent である必要十分条件は次の(1)と(2)が同時にみたされることである。

(1) n 個の正の数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ が存在してすべての $x \in X$ に対して $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) > 0$ である。

(2) $1 \leq k \leq n$ なる k と $\{1, 2, \cdots, n\}$ の中の k 個の元からなる任意の集合 $\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k\}$ とその補集合 $\{\nu_{k+1}, \cdots, \nu_n\}$ に対して, $f_{\nu_i}(x_0) > 0$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ をみたし, さらに $f_{\nu_i}(x_0) \leq 0$ $(i=k+1, \cdots, n)$ をみたすような $x_0 \in X$ が存在する。

証明. 十分性を示す。システム(*)が inconsistent であることは定理3と(1)より明らかである。(*)の $(n-1)$ 個のシステムが consistent であることは(2)より明らかである。次に必要性を示す。(*)が X 上で irreducibly inconsistent であるので $X = \bigcup_{i=1}^{n} \{x : f_i(x) > 0\}$ は明らかであり, 定理3のように n 個の開集合 $\{x : f_i(x) > 0\}$ に対応する単位の分

割を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ とすれば，すべての $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(x_0) f_i(y) > 0$$

をみたすような $x_0 \in X$ が存在することは容易にわかる。まず(1)が示された。次に上の $x_0 \in X$ に対して (*) の $(m-1)$ 個のシステムが X 上で consistent であることと定理3を用いると $\beta_i(x_0) \neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ なることがわかる。それゆえ m 個のすべての i に対して $f_i(x_0) > 0$ なることは単位の分割定理より明らかである。これは $k=m$ の場合(2)を証明したことになる。$1 \leq k \leq m-1$ なる k について(2)を証明しよう。

$$X_0 = \bigcap_{i=k+1}^{m} \{x : f_{\nu_i}(x) \leq 0\}$$

とすると X_0 は X の空でない compact convex 集合であり，仮定より $\{f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \cdots, f_{\nu_k}\}$ は X_0 上で irreducibly inconsistent である。それゆえ上の手続きによって $f_{\nu_i}(x_0) > 0$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ をみたす $x_0 \in X_0$ が存在する。さらにこの x_0 は $f_{\nu_i}(x_0) \leq 0$ $(i=k+1, \cdots, m)$ をみたしていることは明らかである。これで(2)が証明された。

これらの存在定理をもとにして，いろいろの応用を試みるのがこの講究の目的である。

§4. Banach spaces への応用.

N を normed linear space とし，N^* をその dual space とする。そのとき $S=\{f\in N^*;\ \|f\|\leq 1\}$ が weak* compact convex set であることはよく知られている。

定理 5. N を normed linear space とし，L を N の subset とする。そのとき次の(1)と(2)の条件は同値である。

(1) 任意の $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in L^n$ に対して $n\leq f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ でありかつ $\|f\|=1$ であるような $f\in N^*$ が存在する。

(2) すべての $x\in L$ に対して $f(x)\geq 1$ でありかつ $\|f\|=1$ であるような $f\in N^*$ が存在する。

証明. (2)が(1)を意味することは明らかである。それゆえ(1)なら(2)を証明しよう。$x\in L$ に対して S 上の lower semicontinuous convex function F_x を

$$F_x(f)=1-f(x)$$

で定義しよう。そのとき (1) の条件より $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in L^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}(f)=\sum_{i=1}^{n}\left(1-f(x_i)\right)\leq 0$$

なる $f \in S$ の存在がわかる。ここで定理3を用いることによってすべての $x \in L$ に対して $g(x) \geq 1$ であるような $g \in S$ がえられる。$\|g\| \neq 0$ なので $f = g/\|g\|$ とするとこの f が(2)の条件をみたす $f \in N^*$ である。なぜなら $\|f\| = 1$ でありかつすべての $x \in L$ に対して

$$f(x) = \frac{g(x)}{\|g\|} \geqq \frac{1}{\|g\|} \geqq 1$$

である。

この定理を用いると Roberts [7] によってえられた次の結果がただちにえられる。

系. N を normed linear space とし，L をすべての $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in L^n$ に対して $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \geq n$ をみたす N の subset とする。そのときすべての $x \in L$ に対して $f(x) \geq 1$ でありかつ $\|f\| = 1$ であるような $f \in N^*$ が存在する。

証明。$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in L^n$ としよう。条件より $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \geq n$ なので $\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\| \geq 1$ である。Hahn-Banach theorem を用いて

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \geq \sup_{\|y\| \leq 1} f(y) = \|f\| = 1$$

なる $f\in N^*$ を求めることができる。すなわち $(x_1,\cdots,x_n)\in L^n$ に対して $f(\sum_{i=1}^n x_i)\geq n$ でありかつ $\|f\|=1$ であるような $f\in N^*$ がえられる。今や定理を用いて系が証明される。

同じ手法によって Fan [4] によってえられた次の有用な結果も証明できる。

定理6. N を normed linear space とし, $\{x_\nu\}$ をすべては 0 でない N の部分集合, $\{\alpha_\nu\}$ を $\{x_\nu\}$ に対応する実数の集合とする。そのとき次の(1)と(2)の条件は同値である。

(1) すべての ν に対して $f(x_\nu)\geq\alpha_\nu$ なる $f\in N^*$ が存在する。

(2) $\sigma=\sup\{\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_{\nu_i}:\lambda_i>0,\ \|\sum_{i=1}^n\lambda_i x_{\nu_i}\|=1\}<\infty$.

さらに $S_\rho=\{f\in N^*;\ f(x_\nu)\geq\alpha_\nu,\ \forall\nu\}$ としたとき条件(1)のもとで $S_\rho\neq 0$ なら $\min_{f\in S_\rho}\|f\|=\sigma$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). すべての ν に対して $f(x_\nu)\geq\alpha_\nu$ なる $f\in N^*$ をとろう。そして $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ を $\lambda_i>0$ であり, $\|\sum_{i=1}^n\lambda_i x_{\nu_i}\|=1$ なるものとする。$\lambda_i f(x_{\nu_i})\geq\lambda_i\alpha_{\nu_i}$ なので $f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_{\nu_i})\geq\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_{\nu_i}$ をうる。それゆえ,

$$\|f\|\geq\left|f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_{\nu_i}\right)\right|\geq\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_{\nu_i}$$

である。これは $\sigma<\infty$ を意味する。

(2) ⇒ (1)。$\sigma<\infty$ なので $S_\sigma=\{f\in N^* : \|f\|\leq\sigma\}$ とすると S_σ は weak* compact convex set である。ν に対して S_σ 上の関数 F_ν を

$$F_\nu(f)=\alpha_\nu-f(x_\nu)$$

で定義すると F_ν は S_σ 上で continuous affine function である。ここで定理3を用いると (1) を証明しよう。

$\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ を $\lambda_i>0$ で $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ とする。もし $\sum_{i=1}^m\lambda_i x_{\nu_i}\neq 0$ ならば Hahn-Banach theorem を用いて

$$(**)\qquad \sum_{i=1}^m\lambda_i\alpha_{\nu_i}-\sum_{i=1}^m f(\lambda_i x_{\nu_i})\leq 0$$

なる $f\in N^*$ ($\|f\|=\sigma$) をとることができるし、$\sum_{i=1}^m\lambda_i x_{\nu_i}=0$ なら後で証明するが $\sum_{i=1}^m\lambda_i\alpha_{\nu_i}\leq 0$ なので (**) をみたす f として $f=0$ をとればよい。だから定理3よりすべての ν に対して $f(x_\nu)\geq\alpha_\nu$ なる $f\in S_\sigma\subset N^*$ の存在がわかるのである。$\sum_{i=1}^m\lambda_i\alpha_{\nu_i}\leq 0$ なることを証明する。$\mu=\sum_{i=1}^m\lambda_i\alpha_{\nu_i}>0$ とすると仮定より 0 でない x_{ν_0} が存在するので $a\cdot\mu+\frac{1}{\|x_{\nu_0}\|}\alpha_{\nu_0}>\sigma$ なる $a>0$ をとることができる。ところが、

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a\lambda_i x_{\nu_i} + \frac{1}{\|x_{\nu_0}\|} x_{\nu_0} \right\| = 1$$

なので

$$\sum_{i=1}^{m} a\lambda_i \alpha_{\nu_i} + \frac{1}{\|x_{\nu_0}\|} \alpha_{\nu_0} \leq \sigma$$

となりただちに矛盾をうる。

次に(1)のもとで $S_\rho \neq 0$ とすると $0 < \sigma < \infty$ であり，$S_\sigma = \{ f \in N^* ; \|f\| \leq \sigma \}$ の中に解があるので $\min_{f \in S_\rho} \|f\| \leq \sigma$ は明らかである。また $f \in S_\rho$ なら

$$\|f\| \geq f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{\nu_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{\nu_i}$$

なので $\|f\| \geq \sigma$ をうる。すなわち $\min_{f \in S_\rho} \|f\| \geq \sigma$ である。ゆえに $\min_{f \in S_\rho} \|f\| = \sigma$ をうる。

§5. Invariant measures への応用.

X を compact Hausdorff space とし，$C(X)$ を real valued continuous functions の作る Banach algebra とする。$C(X)_+$ でその positive part を表わし，M で X 上の probability measures の全体を表わすものとする。M が weak* compact convex set をなすことはよく知られたことである。

定理7. Σを$C(X)$上のMarkov operatorsの作るあるfamilyとする。そのとき次の(1), (2), (3)の条件は同値である。

(1) X上にΣ-invariantなprobability measure μが存在する。

(2) $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$と$(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+^n$に対して

$$\sum_{i=1}^{n} T_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

なる$x \in X$が存在する。

(3) TとfによってそれぞれΣと$C(X)_+$の元を表わすとき

$$\sup_{T,f} \min_{\mu \in M} \mu(Tf - f) = \min_{\mu \in M} \sup_{T,f} \mu(Tf - f)$$

が成立する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). μをΣ-invariantなprobability measureとする。そのとき$(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$と$(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+^n$に対して

$$\int \sum_{i=1}^{n} T_i f_i \, d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} f_i \, d\mu$$

である。それゆえ

$$\sum_{i=1}^{n} T_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

なる $x \in X$ が存在することは明らかであろう。

(2) ⇒ (1)。 $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して M 上の continuous affine function $F_{T,f}$ を

$$F_{T,f}(\mu) = \mu(Tf - f)$$

によって定義する。このとき $\alpha_i \geq 0$ で $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ なる n 個の実数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ と $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$, $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+^n$ に対して (2) の仮定によって

$$\delta_x\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i f_i\right) \leq \delta_x\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)$$

なる $\delta_x \in M$ が存在するので，定理3を用いることによってすべての $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf) \leq \mu(f)$ なる $\mu \in M$ の存在がわかる。この μ に対しては $\mu(Tf) \geq \mu(f)$ も成立する。なぜなら任意の $f \in C(X)_+$ に対して $\|f\| \cdot 1 - f \geq 0$ であるので

$$\mu(T(\|f\| \cdot 1 - f)) \leq \mu(\|f\| \cdot 1 - f)$$

が成立する。すなわちすべての $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf) \geq \mu(f)$ となる。これで (2) ⇒ (1) が証明された。

(1) ⇒ (3)。不等式

$$a = \sup_{T,f} \min_{\mu\in M} \mu(Tf-f) \leq \min_{\mu\in M} \sup_{T,f} \mu(Tf-f) = b$$

は常に成立するので，これから等号の成立を証明すればよい。$f=0$ とすることによって $a\geq 0$ であり，任意の T と f に対して $\delta_x(Tf-f)\leq 0$ なる $\delta_x\in M$ が存在するので $a\leq 0$ でもある。それゆえ $a=0$ である。また(1)の条件によって Σ-invariant な probability measure μ が存在するので $b\leq 0$ がえられる。これで $a=b$ が証明された。

(3) $\Rightarrow$ (1). 仮定より

$$\sup_{T,f} \min_{\mu\in M} \mu(Tf-f) = \min_{\mu\in M} \sup_{T,f} \mu(Tf-f)$$

であり，その左辺は 0 であるので

$$0 = \min_{\mu\in M} \sup_{T,f} \mu(Tf-f)$$

がえられる。すなわち

$$\sup_{T,f} \mu(Tf-f) = 0$$

なる $\mu\in M$ が存在することになる。これはすべての $T\in\Sigma$ と $f\in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf)\leq\mu(f)$ なることを意味するので (2) $\Rightarrow$ (1) の証明におけると同様にこの μ が Σ-invariant probability measure であることがわかる。

注意. 上の定理において Σ を one point set としたとき(3)の条件は mini-max 定理 [3] より常に成立するので、Markov operator に対する invariant measure の存在は Tychonoff の不動点定理を用いることなしで Mini-max 定理よりえられることになる。例えばこれを X から X への continuous mapping T に応用すれば mini-max 定理によって X 上の T-invariant measure の存在がえられることになるのである。この μ が空間 X に何らかの条件をいれることによって point measure になってくれれば すなわち T の不動点の存在となるわけである。

§6. Games への応用.

X をある set とし, $\mathcal{A}$ を X の subsets からなる一つの algebra とする。$B(X, \mathcal{A})$ によって bounded $\mathcal{A}$-measurable functions の作る Banach space を表わし, $B^*(X, \mathcal{A})$ によって $\mathcal{A}$ 上の bounded additive set functions の全体を表わすことにする。$v \in V(X, \mathcal{A})$ が game であるとは $v : \mathcal{A} \longrightarrow R_+$ であり $v(\phi) = 0$ のとき

である。game v の core とはすべての $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A) \geq v(A)$ であり $\mu(X) = v(X)$ である $\mu \in B^*(X, \mathcal{A})$ の全体のことである。これを $\mathcal{C}(X, \mathcal{A}, v)$ であらわす。次の定理は Schmeidler [9] によってえられたものであるが、定理3を用いることによって簡単に証明することができる。

定理8. v を game としたとき次の(1), (2), (3)の条件は同値である。

(1) $\mathcal{C}(X, \mathcal{A}, v) \neq \phi$.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \geq 0$ と $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathcal{A}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v(A_i) \leq v(X) \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i 1_{A_i} \right\|$$

が成立する。

(3) $(A_1, A_2, \cdots, A_m) \in \mathcal{A}^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} v(A_i) \leq v(X) \left\| \sum_{i=1}^{m} 1_{A_i} \right\|$$

が成立する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). $\mu \in \mathcal{C}(X, \mathcal{A}, v)$ としよう。すると $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \geq 0$ と $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathcal{A}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v(A_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu(A_i) = \mu\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i 1_{A_i}\right)$$

$$\leq \mu(1)\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i 1_{A_i}\right\|$$

$$= v(X)\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i 1_{A_i}\right\|$$

となる。

(2) ⇒ (3). 明らか。

(3) ⇒ (2). $C=\{\mu\in B^*(X,\mathcal{A});\mu(X)=v(X)\}$ としよう。$A\in\mathcal{A}$ に対して C 上の函数 F_A を

$$F_A(\mu)=v(A)-\mu(A)$$

で定義すると，(3) の仮定より任意の $(A_1,A_2,\cdots,A_m)\in\mathcal{A}^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m}v(A_i)\leq v(X)\left\|\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\right\|=\mu\left(\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\right)$$

なる $\mu\in C$ が存在するので定理3を用いて

$$\mu(A)\geq v(A),\ \mu(X)=v(X)$$

なる $\mu\in C$ をうることができる。これで定理が証明された。

同様な手法を用いることによって exact games や convex games の特性化をうることができるがここではかかない。

§7. Mini-max theorem への応用。

このsectionでは定理4の応用としてFanのmini-max theorem[3]を証明してみる。

定理9. Xを線形位相空間のcompact convex集合とし、Yをあるsetとしよう。$X\times Y$上の実数値函数fが次の(1)と(2)の条件：

(1) 任意の$y\in Y$に対して、xの函数$f(x,y)$はlower semicontinuousでconvexである。

(2) 任意の$x\in X$に対して、yの函数$f(x,y)$はconcave-likeである。

をみたすならば、そのとき

$$\sup_y \min_x f(x,y)=\min_x \sup_y f(x,y)$$

が成立する。

証明. $c=\sup_y \min_x f(x,y)$とする。これは任意の$y\in Y$に対して$f(x,y)\leq c$なる$x\in X$の存在を意味する。いま任意の$(n-1)$個の元$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset Y$に対して

$$f(x,y_i)\leq c\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

なる$x\in X$が常に存在するとして、任意のn個の元$\{y_1,y_2,$

$\cdots, y_n\} \subset Y$ に対しても

$$f(x, y_i) \leq c \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

なる $x \in X$ が存在することを証明しよう。

$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset Y$ に対して

$$(***) \qquad f(x, y_i) \leq c \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

が inconsistent であるとしよう。すると $(***)$ は irreducibly inconsistent である。そこで定理4が使えてすべての $x \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, y_i) > c$$

なるような n 個の positive numbers $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ が存在する。(2)の条件を用いると，すべての $x \in X$ に対し

$$f(x, y_0) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x, y_i) > c$$

なる $y_0 \in Y$ の存在をうる。この y_0 に対しては $f(x_0, y_0) \leq c$ なる $x_0 \in X$ が存在するので，上の式に矛盾する。これで

$$\min_x \sup_y f(x, y) \leq c$$

がえられ，定理が証明される。

References.

[1] F. E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283–301.

[2] N. Dunford - J. T. Schwartz, Linear operators, Part 1, Interscience, New York (1958).

[3] K. Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38 (1952), 121–126.

[4] K. Fan, On systems of linear inequalities, in "Linear inequalities and related systems", Ann. of Math. Stud. 38 (1956), 99–156.

[5] K. Fan, Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z. 68 (1957), 205–217.

[6] K. Fan, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, Math. Ann. 163 (1966), 189–203.

[7] J. W. Roberts, Invariant measures in compact Hausdorff spaces, Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), 691–718.

[8] K. Sakamaki-W. Takahashi, Systems of convex inequalities and their applications, to appear.

[9] D. Schmeidler, On balanced games with infinitely many players, Research Program in Game Theory and Mathematical Economics, RM 28, The Hebrew University of Jerusalem.

[10] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixedpoint theorems, J. Math. Soc. of Japan, 28 (1976), 168-181.

[11] 高橋 渉, 不動点定理をめぐる最近の結果, 数学 28 (1976), 236-247.